УДК 514.76

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glasirina@mail2000.ru

Рассмотрены отображения двумерных плоскостей L_2^1 и L_2^2, инвариантным образом связанных с распределением двумерных плоскостей в четырехмерном эвклидовом пространстве. Каждое из отображений определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому для их изучения привлекаются гармонические функции и известные условия Коши-Римана. Все рассмотрения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1–7].

Рассматривается четырехмерное эвклидово пространство E_4, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_i\}(i,j,k,l=\overline{1,4})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$d\overline{A}=\omega^i\overline{e}_i,\quad d\overline{e}_i=\omega_i^k\,\overline{e}_k,\qquad D\omega^k=\omega^i\wedge\omega_i^k,\quad D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k. \tag{1.1}$$

Здесь 1-формы ω_i^k удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^k+\omega_k^i=0, \tag{1.2}$$

вытекающим из условия ортонормальности репера R:

$$(\overline{e}_i;\ \overline{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.3}$$

В пространстве E_4 зададим распределение

$$\Delta_{2,4}^1: M\to L_2^1,$$

где M – текущая точка пространства E_4, а L_2^1 – двумерная плоскость, проходящая через эту точку. Присоединим к распределению ортонормальный репер R так, чтобы

$$M=A, L_2^1=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2)\Leftrightarrow x^{\widehat{\alpha}}=0,\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\gamma}=3,4. \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_s=(\overline{A},\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_s)(s<4)$ обозначается s-мерная плоскость (s-плоскость), проходящая через точку A параллельно линейно-независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_s$, а величины x^i означают локальные точечные координаты относительно репера R. Из (1.4) и (1.1) следует, что дифференциальные уравнения распределения $\Delta_{2,4}^1{:}M\to L_2^1$ в E_4 можно записать в виде:

$$\omega_\alpha^{\widehat{\alpha}}=A_{\alpha i}^{\widehat{\alpha}}\omega^j\Rightarrow\omega_{\widehat{\alpha}}^{\alpha}=-\omega_\alpha^{\widehat{\alpha}}=A_{\widehat{\alpha}i}^{\alpha}\omega^j\Rightarrow A_{\widehat{\alpha}i}^{\alpha}-A_{\alpha i}^{\widehat{\alpha}},$$

$$dA_{\alpha i}^{\widehat{\alpha}}-A_{\beta i}^{\widehat{\alpha}}\omega_\alpha^\beta-A_{\beta j}^{\widehat{\alpha}}\omega_i^j+A_{\alpha i}^{\widehat{\beta}}\omega_{\widehat{\beta}}^{\widehat{\alpha}}=A_{\alpha ij}^{\widehat{\alpha}}\omega^j,\ A_{\alpha[ij]}^{\widehat{\alpha}}=0, \tag{1.5}$$

где $\alpha,\beta,\gamma=1,2$. Из (1.3) и (1.4) следует, что с распределением $\Delta_{2,4}^1{:}M\to L_2^1$ в E_4 ассоциируется распределение

$$\Delta_{2,4}^2: A\to L_2^2=(\overline{A},\ \overline{e}_3,\ \overline{e}_4)\perp L_2^1. \tag{1.6}$$

Здесь плоскость $L_2^2=(\overline{A},\overline{e}_3,\overline{e}_4)\Leftrightarrow x^{\widehat{\alpha}}=0$ в точке $A\in E_4$ будет оснащающей в смысле [2] или нормальной в смысле [3] плоскостью распределения $\Delta_{2,4}^1$.

Замечание 1.1. Из (1.3–1.6) в силу (1.1) следует, что интегральные кривые [2] распределений $\Delta_{2,4}^1{:}M\to L_2^1$ и $\Delta_{2,4}^2{:}M\to L_2^2$, описываемые точкой $A\in E_4$ с касательными, принадлежащими L_2^1 и L_2^2, определяются соответственно уравнениями:

$$\Delta_{2,4}^1:\ \omega^{\widehat{\alpha}}=0;\ \Delta_{2,4}^2:\ \omega^{\alpha}=0. \tag{1.7}$$

Эти дифференциальные уравнения в силу (1.1) и (1.5) будут вполне интегрируемыми, т.е. распределения $\Delta_{2,4}^1$ и $\Delta_{2,4}^2$ будут инвалютивными или голономными [2], тогда и только тогда, когда соответственно:

$$\Delta_{2,4}^1:\ A_{[12]}^{\widehat{\alpha}}=0;\ \Delta_{2,4}^2:\ A_{[34]}^{\alpha}=0,\ (\alpha=1,2;\ \widehat{\alpha}=3,4). \tag{1.8}$$

2. Отображения f_α и φ_α плоскостей L_2^1 и L_2^2

2.1. Квадратичные отображения

В каждой точке $A \in E_4$ можно получить нижеследующие отображения плоскостей L_2^1 и L_2^2, определяемые двумя соответствующими квадратичными функциями двух аргументов:

$$f_1 : y^{\hat\alpha} = B^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta; f_2 : y^\alpha = B^\alpha_{\hat\alpha\hat\beta} x^{\hat\alpha} x^{\hat\beta};$$

$$\varphi_1 : y^{\hat\alpha} = A^{\hat\alpha}_{12}(x^1)^2 + (A^{\hat\alpha}_{22} - A^{\hat\alpha}_{11})x^1x^2 - A^{\hat\alpha}_{21}x^2x^1; \qquad (2.1)$$

$$\varphi_1 : y^\alpha = A^\alpha_{34}(x^3)^2 + (A^\alpha_{44} - A^\alpha_{33})x^3x^4 - A^\alpha_{43}(x^4)^2,$$

где величины $B^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}$ и $B^{\varepsilon}{}_{\hat\alpha\hat\beta}$ определяются по формулам и удовлетворяют в силу (1.5) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$B^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}A^{\hat\alpha}_{(\alpha\beta)},\ B^\alpha_{\hat\alpha\hat\beta} = \frac{1}{2}A^\alpha{}_{(\hat\alpha\hat\beta)} = -B^\alpha_{\alpha\hat\beta},$$
$$dB^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} - B^{\hat\alpha}_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - B^{\hat\alpha}_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta + B^{\hat\beta}_{\alpha\beta}\omega^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta} = B^\alpha_{\alpha\beta i}\omega^i. \qquad (2.2)$$

Символом $T_u(z)$ будем обозначать касательное линейное подпространство к 1-семейству прямых z в направлении u, т.е. вдоль линии (A), описываемой точкой A, с касательными u в точке A. Из (2.1) с учетом (1.1), (1.4), (1.5–1.7) и (2.2) получается следующая геометрическая интерпретация отображений f_α и φ_α ($\alpha = 1,2$):

$$f_1 : L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y = f_1(x) = L_2^2 \cap \{T_x(x) \cup L_2^1\},\ x \in L_2^1;$$

$$\varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2 \Leftrightarrow y = \varphi_1(x) = L_2^2 \cap \{T_{\hat x}(x) \cup L_2^1\},\ \hat x \perp x, x \in L_2^1;$$

$$f_2 : L_2^2 \to L_2^1 \Leftrightarrow y = f_2(x) = L_2^1 \cap \{T_x(x) \cup L_2^2\},\ x \in L_2^2;$$

$$\varphi_2 : L_2^2 \to L_2^1 \Leftrightarrow y = \varphi_2(x) = L_2^1 \cap \{T_{\hat x}(x) \cup L_2^2\},\ \hat x \perp x, x, x \in L_2^2.$$

Здесь в случае отображения $f_\alpha(\varphi_\alpha)$ прямая $x \in L_2^\alpha(\hat x \in L_2^\alpha)$ является касательной к линии (A) вдоль интегральной кривой распределения $\Delta^\alpha_{2,4}(\alpha = 1,2)$.

2.2. Гармонические $f_{\alpha r}$, $\varphi_{\alpha r}$ и аналитические $f_{\alpha a}$, $\varphi_{\alpha a}$ отображения плоскостей L_2^1 и L_2^2

Из (2.1) следует, что каждое из отображений $f_\alpha, \varphi_\alpha : L_2^\alpha \to L_2^\beta$, $(\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1,2)$ в каждой точке $A \in E_4$ определяется двумя соответствующими функциями от двух аргументов с областью определения $L_2^\beta(\alpha \neq \beta)$. Каждая из пар указанных функций от двух аргументов в точках области определения могут удовлетворять условиям Коши-Римана [6. С. 75–76] или могут быть гармоническими функциями.

Определение 2.1. Отображение

$$\phi : H_2 \to H_2^* \Leftrightarrow y^q = \phi^q(x^p), \quad (p = 1,2;\ q = 3,4) \qquad (2.3)$$

двумерных плоскостей H_2 и $H^*_2(A \in H_2, A \in H^*_2)$ называется:

1. гармоническим в точке $M(x^p) \in H_2$ или отображением $\phi_r(\phi \to \phi_r)$, если определяющие это отображение функции y^q являются гармоническими в этой точке;
2. аналитическим или отображением $\phi_a(\phi \to \phi_a)$, если функции y^q удовлетворяют условиям Коши-Римана в любой точке $M(x^p)\varphi_\alpha \in H_2$.

Заметим, что функции (2.3) будут гармоническими в точке $M \in H_2$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial^2 y^q}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 y^q}{(\partial x^1)^2} = 0. \qquad (2.4)$$

В соответствии с [6. С. 75–76] функции (2.3) удовлетворяют условиям Коши-Римана тогда и только тогда, когда во всех точках $M \in H_2$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^2},\ \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = -\frac{\partial y^4}{\partial x^1}. \qquad (2.5)$$

Легко заметить, что из условий (2.5) в точке $M \in H_2$ вытекают условия (2.4). Этот факт известен в теории функций комплексного переменного: если функции комплексного переменного является аналитической, т.е. ее вещественная и мнимая части удовлетворяют в некоторой области условиям Коши–Римана, то эти функции являются гармоническими в этой области.

Из (2.4) и (2.5) в соответствии с определением 2.1 получаем условия гармоничности и аналитичности всех отображений (2.1). При этом следует иметь в виду, что если каждое отображение f_α или φ_α гармонично, то оно будет гармонично на всей плоскости L_2^1 или L_2^2.

1. Гармонические отображения

$$f_{1r} : A^{\hat\alpha}_{11} + A^{\hat\alpha}_{22} = 0;\ \varphi_{1r} : A^{\hat\alpha}_{12} - A^{\hat\alpha}_{21} = 0;$$
$$f_{2r} : A^\alpha_{33} + A^\alpha_{44} = 0;\ \varphi_{2r} : A^\alpha_{34} - A^\alpha_{43} = 0. \qquad (2.6)$$

2. Аналитические отображения

$$f_{1a}: A^{\hat\alpha}_{11} + A^{\hat\alpha}_{22} = 0,\ A^3_{12} + A^3_{21} - 2A^4_{22} = 0,\ A^4_{12} + A^4_{21} + 2A^3_{22} = 0;$$

$$\varphi_{1a}: A^{\hat\alpha}_{12} = A^{\hat\alpha}_{21},\ A^4_{11} - A^4_{22} + 2A^3_{12} = 0,\ A^3_{22} - A^3_{11} + 2A^4_{12} = 0; \qquad (2.7)$$

$$f_{2a}: A^\alpha_{33}A^\alpha_{44} = 0,\ A^\alpha_{34} + A^\alpha_{43} - 2A^2_{44} = 0,\ A^2_{34} + A^2_{43} + 2A^1_{44} = 0;$$

$$\varphi_{2a}: A^{\hat\alpha}_{34} = A^\alpha_{43},\ A^2_{33} - A^2_{44} + 2A^1_{34} = 0,\ A^1_{44} - A^1_{33} + 2A^2_{34} = 0;$$

где $\alpha = 1,2$; $\hat\alpha = 3,4$. Из (2.6) и (2.7) вытекают следующие утверждения:

1) $f_\alpha \to f_{\alpha a} \Rightarrow f_\alpha \to f_{\alpha r}$;
2) $\varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a} \Rightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r}$;
3) $f_\alpha \to f_{\alpha a}, \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r} \Rightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a}$;
4) $\varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a}, f_\alpha \to f_{\alpha r} \Rightarrow f_\alpha \to f_{\alpha a}$.

Имеет место

Теорема 2.1. Отображение $\varphi_\alpha : L_2^\alpha \to L_2^\beta(\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1,2)$ в каждой точке $M \in E_4$ является гармоническим, в смысле определения 2.1, тогда и только тогда, когда распределение $\Delta^\alpha_{2,4}$ ($\alpha = 1,2$; α – фиксировано) голономно.

Доказательство этой теоремы вытекает из (2.6) и (1.8).

3. Геометрические свойства отображений $f_{\alpha r}$, $\varphi_{\alpha r} : L_2^\alpha \to L_2^\beta(\alpha \neq \beta)$

В настоящем пункте будут выяснены геометрические свойства отображений $f_{\alpha r}$ и $\varphi_{\alpha r}$. Для опреде-

ленности подробнее остановимся для выяснения геометрических свойств указанных отображений при $\alpha = 1$. Геометрические свойства отображений при $\alpha = 2$ можно получить из геометрических свойств отображений при $\alpha = 1$ формальной заменой индексов $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$.

3.1. Прямые $q_2(z)$ и $\widehat{q}_2(z)$ в L_2^1, отвечающие прямой $z \in L_2^2$

Точке $A \in E_4$ в плоскости L_2^2 поставим в соответствие прямую

$$z = (\bar{A}, \bar{e}_{\hat{\alpha}}) z^{\hat{\alpha}}. \qquad (3.1)$$

Из (2.1) с учетом (2.2) замечаем, что совокупность прямых $x = (\bar{A}, \bar{e}_{\hat{\alpha}}) z^{\hat{\alpha}} \in L_2^1$, образы которых при отображениях $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$ и $\varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2$ ортогональны прямой (3.1), определяются уравнениями соответственно

$$q_2(z) = f_1(x) \Leftrightarrow z_{\hat{\alpha}} B^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0,\ x^{\hat{\alpha}} = 0,\ z_{\hat{\alpha}} = z^{\hat{\alpha}},$$

$$\widehat{q}_2(z) = \varphi_1(x) \Leftrightarrow z_{\hat{\alpha}} \{A^{\hat{\alpha}}_{12}(x^1)^2 + (A^{\hat{\alpha}}_{22} - A^{\hat{\alpha}}_{11}) x^1 x^2 - A^{\hat{\alpha}}_{21}(x^2)^2\} = 0,\ x^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad (3.2)$$

$(\alpha = 1,2$: $\beta = 1,2$: $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} = 3,4)$.

Из (3.2) следует, что каждой прямой $z \in L_2^2$ в плоскости L_2^1 отвечают по две прямые $q_2(z) = f_1(x)$ и $\widehat{q}_2(z) = \varphi_1(x)$. Каждую из этих пар прямых в L_2^1, проходящих через точку A, будем называть ассоциированными прямыми прямой $z \in L_2^2$ относительно соответствующего отображения f_1 или φ_1.

Из (3.2) и (2.6) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Отображение $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$ ($\varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2$), отвечающее точке $A \in E_4$, является гармоническим отображением f_{1r} (φ_{1r}) тогда и только тогда, когда ассоциированные прямые $q_2(z)$ ($\widehat{q}_2(z)$) прямой $z \in L_2^2$ относительно отображения f_1 (φ_1) ортогональны друг другу при любом выборе прямой $z \in L_2^2$.

3.2. Фокусная прямая $K_2^{11} \subset L_2^1$ и коника $K_2^{12} \subset L_2^2$ вдоль интегральных кривых распределения $\Delta^1_{2,4}$

Пусть точки $X \in L_2^1$ и $Y \in L_2^2$ с радиус-векторами $\bar{X} = \bar{A} + x^{\alpha} \bar{e}_{\alpha}$ и $\bar{Y} = \bar{A} + y^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}}$ являются фокусами [7] вдоль фокальных интегральных кривых распределения $\Delta^1_{2,4}$. Тогда из

$$(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0,\ (d\bar{X}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = 0,\ \omega^{\hat{\alpha}} = 0$$

с учетом (1.1), (1.5) и (1.7) находятся уравнения двух фокусных прямых K_2^{11} плоскости L_2^1 и фокусной коники $K_2^{12} \subset L_2^2$:

$$K_2^{11}: a_{ab} x^{\alpha} x^{\beta} = 0,\ x^{\hat{\alpha}} = 0;$$

$$K_2^{12}: b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} y^{\hat{\alpha}} y^{\hat{\beta}} + 2 b_{\hat{\alpha}} y^{\hat{\alpha}} + 1 = 0,\ y^{a} = 0, \qquad (3.3)$$

где

$$a_{11} = A^3_{11} A^4_{12} - A^3_{12} A^4_{11},\quad a_{22} = A^3_{21} A^4_{22} - A^3_{22} A^4_{21},$$
$$2a_{12} = A^3_{11} A^4_{22} + A^3_{21} A^4_{12} - A^3_{12} A^4_{21} - A^3_{22} A^4_{11},$$
$$b_{33} = A^3_{11} A^3_{22} - A^3_{12} A^3_{21},\quad b_{44} = A^4_{11} A^4_{22} - A^4_{12} A^4_{21}, \qquad (3.4)$$
$$2b_{34} = A^3_{11} A^4_{22} + A^4_{11} A^3_{22} - A^3_{12} A^4_{21} - A^4_{12} A^3_{21},$$
$$2b_{\hat{\alpha}} = -A^{\hat{\alpha}}_{11} - A^{\hat{\alpha}}_{22}.$$

Теорема 3.2. Отображение $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$, отвечающее точке $A \in E_4$, является отображением f_{1r} тогда и только тогда, когда точка $A \in E_4$ является центром коники $K_2^{12} \subset L_2^2$.

Теорема 3.3. Если отображения $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$, $\varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2$, отвечающие точке $A \in E_4$, являются отображениями f_{1r}, φ_{1r}, то фокусные прямые $K_2^{11} \subset L_2^1$, ортогональны.

Доказательство теорем 3.2 и 3.3 вытекает из (3.3), (3.4) и (2.6).

Замечание 3.1. Геометрические свойства отображений $f_{\alpha\alpha}, \varphi_{\alpha\alpha} : L_2^{\alpha} \to L_2^{\beta}$ ($\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1,2$) в каждой точке $A \in E_4$, а также существование этих отображений будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центрированных 2-плоскостей в многомерном эвклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 4. – С. 5–9.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.
7. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.